

CÁLCULO ESTRUCTURAL

Ingeniería civil y arquitectura

- ⚡ Energía de deformación
- ⚡ Método de Cross
- ⚡ Método de Kani
- ⚡ Método de Naylor
- ⚡ Arcos

Miguel Chiñas de la Torre



trillas 

CÁLCULO ESTRUCTURAL

Catalogación en la fuente

Chiñas de la Torre, Miguel

Cálculo estructural : ingeniería civil y arquitectura. --
2a ed. -- México : Trillas, 2007 (reimp. 2017).

293 p. : il. ; 24 cm.

Bibliografía: p. 293

ISBN 978-968-24-7984-7

1. Estructuras, Teorías de las. 2. Ingeniería civil - Tablas, cálculos, etc. 3. Arquitectura - Diseños y planos. I. t.

D- 624.17'Ch399c

LC- TA645'C4.2

1990

La presentación y
disposición en conjunto de
CÁLCULO ESTRUCTURAL.
Ingeniería civil y arquitectura
son propiedad del editor.

Ninguna parte de esta obra puede ser
reproducida o transmitida, mediante ningún
sistema o método, electrónico o mecánico
(incluyendo el fotocopiado, la grabación
o cualquier sistema de recuperación y
almacenamiento de información),
sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 05, 2007, Editorial Trillas, S. A. de C. V.

División Administrativa,
Av. Río Churubusco 385,
Col. Gral. Pedro María Anaya,
C. P. 03340, México, Ciudad de México
Tel. 56884233, FAX 56041364
churubusco@trillas.mx

División Logística,
Calzada de la Viga 1132,
C. P. 09439, México, Ciudad de México
Tel. 56330995
FAX 56330870
laviga@trillas.mx

 **Tienda en línea**
www.etrillas.mx

Miembro de la Cámara Nacional de
la Industria Editorial
Reg. núm. 158

Primera edición OS (ISBN 968-24-2964-1)
‡(OE, SS, SL)
Segunda edición SE (ISBN 978-968-24-7984-7)
‡(TR)

Reimpresión, mayo 2017

Impreso en México
Printed in Mexico

Prólogo a la segunda edición

Hace aproximadamente 45 años escribí: "Este libro fue escrito con el corazón, pensando en mis amigos, los estudiantes de ingeniería, que se inician en el análisis de estructuras hiperestáticas. He tratado de presentar en él, por medio de un desarrollo sencillo, racional y didáctico, los métodos que me parecen más adecuados para resolver los problemas que con más frecuencia se presentan al ingeniero civil o arquitecto".

Pienso que estas palabras aún son vigentes. En aquel tiempo lo más pertinente era aplicar los métodos de aproximaciones sucesivas que se describen en este libro, para obtener los valores de las incógnitas hiperestáticas, fuerzas y momentos, que aparecen en los extremos de las barras que forman parte de una estructura continua cualquiera. Así, una estructura de 5 niveles y 5 crujeas, con 25 nudos, podría ser resuelta por un calculista en dos días aproximadamente, utilizando solamente la regla de cálculo o una calculadora manual, que eran los únicos elementos con los que se contaba entonces.

Sabíamos desde entonces que podíamos obtener los valores de las deformaciones por medio de una matriz de 30×30 elementos, 25 rotaciones + 5 desplazamientos, pero era trabajo de titanes invertirla y resolverla y nos tomaba un tiempo muchísimo más largo.

Muchas cosas han cambiado con los especuladores avances de la cibernética.

Actualmente existen programas para computadora que no sólo obtienen las incógnitas hiperestáticas, sino que también diseñan las piezas de la estructura, ya sean de concreto armado o de acero, en unos cuantos minutos. Pero las bases fundamentales de estos cálculos no han cambiado, aun siguen considerándose válidas las ecuaciones de Bresse y los teoremas de Castigliano. Aún para el cálculo de las deformaciones siguen empleándose fórmulas derivadas del comportamiento elástico de los materiales.

No dudo que esto también cambiará en un tiempo no lejano. Quizá comiencen a fundamentar nuevas teorías sobre el comportamiento de las estructuras hiperestáticas, sacada de estadísticas de pruebas de laboratorio en modelos fisicomatemáticos-cibernéticos.

Por otra parte, si la aplicación de los programas cibernéticos superan ampliamente a los métodos de aproximaciones sucesivas en la rapidez para obtener resultados, prácticamente sin ningún esfuerzo mental, creo que los métodos de aproximaciones sucesivas superan a los programas cibernéticos desde el punto de vista didáctico, ya que obligan al estudiante a imaginar las deformaciones que las cargas producen a la estructura y así comprender mejor su comportamiento.

Prólogo

Este libro fue escrito para mis amigos, los estudiantes de ingeniería, que se inician en el análisis de estructuras hiperestáticas. He tratado de presentar en él, por medio de un desarrollo sencillo, racional y didáctico, los métodos que me parecen más adecuados para resolver los problemas que con más frecuencia se presentan al ingeniero civil o arquitecto.

En el capítulo correspondiente se da una solución e interpretación de las fórmulas para resolver el problema de la pieza en balcón, tema poco tratado por otros autores, así como se propone una limitación a la aplicación de las fórmulas convencionales para arcos, y se sugieren los términos que deben considerarse de la expresión general, para cada caso particular, de modo que exista siempre un ejemplo aclarador del concepto.

En ese orden de ideas, mis mejores deseos son en el sentido de que el presente libro sirva para hacer más accesible a los estudiantes el conocimiento de tales temas, y si en algo ayuda, me sentiré muy satisfecho.

ING. MIGUEL CHIÑAS DE LA TORRE

Índice de contenido

Prólogo a la segunda edición	5
Prólogo	6
Cap. 1. Método de Cross	11

1. Conceptos fundamentales. Rigidez angular, factor de transporte, factor de distribución, 11. Cálculo de factores de distribución, 18. Cálculo de momentos de empotramiento, 20. 2. Rigidez angular cuando $f_t = 0$. Ejemplo, 21. Factores de distribución, 22. Momentos iniciales, 22. 3. Simetría en forma y carga. Eje de simetría sobre el apoyo central, 23. 4. Simetría en forma y antimetría en carga. Eje sobre el apoyo central, 24. Factores de distribución, 25. Momentos iniciales, 25. 5. Simetría en forma, con carga cualquiera. Eje sobre un apoyo, 27. Factores de distribución, 27. Momentos iniciales, 27. 6. Simetría en forma y en carga. Eje sobre el claro central, 30. Factores de distribución, 31. Momentos iniciales, 31. 7. Simetría en forma y antimetría en carga. Eje en el claro central, 34. Factores de distribución, 34. 8. Simetría en forma, con una carga cualquiera. Eje sobre el claro central, 36. 9. Simplificación por voladizos, 39. Cálculo f_d , 40. 10. Trabajo por nudos alternados, 43. 11. Convención de signos en los que se tiene en cuenta el diagrama de momentos, 45. 12. Métodos de tramos aislados con carga, 48. 13. Aplicación a marcos rígidos simétricos en forma y carga, 51. 14. Análisis de fuerzas horizontales. Método indirecto, 53. Cálculo de factores de distribución, 56. 15. Análisis de fuerzas horizontales. Método directo. Rigidez lineal. Factor de distribución al corte, 61. Factores de distribución a la flexión, 65. Factores de distribución al cortante, 66. Primera corrección, 67. Segunda corrección, 68. Factores de distribución, 70. Cortantes desequilibrados hiperestáticos, 72. Cortes desequilibrados isostáticos, 72. 16. Desequilibrio de fuerzas verticales. Vigas Vierendeel, 74. Cargas isostáticas, 76. Cargas hiperestáticas, 76. 17. Estructuras con piezas horizontales interrumpidas. Rigideces lineales de conjuntos.

Columnas en serie, Columnas en paralelo. Analogía eléctrica, 81. Cálculo de factores de distribución, 90. Momentos iniciales, 90. Primera corrección, 93. 18. Estructuras con piezas inclinadas, 94. 19. Efectos de los hundimientos, 101. 20. Efectos de temperatura. Método indirecto. Método directo, 103. 21. Estructuras en el espacio. La pieza normal al nudo. Rigidez angular por torsión, 108. Cálculo de rigideces angulares, 112. 22. Estructuras con piezas curvas, 114. 23. Fuerzas normales al plano de la estructura, 115. 24. Distribución de módulos, 122. Factores de distribución, 124. Cálculo de nuevos factores de distribución, 126.

Cap. 2. Método de Kani **129**

1. Consideraciones generales, 129. 2. Marcos rígidos con nudos Indesplazables. Conceptos fundamentales. Factor de distribución angular de Kani, 129. 3. Marcos rígidos con nudos desplazables. Fórmulas y relaciones. Factor de distribución de piso Kani, 135. 4. Ejemplos de marcos con nudos desplazables. Marco asimétrico con cargas verticales. Marco con cargas horizontales, 140. Marco rígido con carga vertical y con nudos desplazables horizontalmente, 140. Marco rígido con cargas externas horizontales, 142.

Cap. 3. Método de Naylor **147**

1. Conceptos fundamentales. Ciclo de Naylor. Factores de distribución angular. Principio de los múltiples. Ejemplo, 147. Método directo, 150. Método de Naylor, 152.

Cap. 4. Energía de deformación **157**

1. Expresiones del trabajo, 157. Trabajo desarrollado por una carga normal axial, ya sea de tensión o compresión, 159. Trabajo desarrollado por fuerza cortante, 160. Trabajo desarrollado por un momento de flexión, 161. Trabajo desarrollado por torsión, 162. 2. Teoremas de Castigliano, 163. 3. Expresiones de Castigliano para determinar desplazamientos y giros en las barras, 165. 4. Expresiones del trabajo virtual. Fórmulas de Maxwell y Mohr, 167. 5. Aplicaciones en vigas. Recomendaciones, 170. 6. Aplicaciones a arcos. Límites y recomendaciones, 175. Caso 1, 180. Caso 2, 181, Caso 3, 181.

Cap. 5. Arcos **183**

1. La pieza plana. El arco de tres rótulas, 183. 2. Arco de alma llena de dos articulaciones. Ejemplos. División en dovelas, 184. Arco parabólico articulado con carga uniforme en proyección horizontal, 186. Arco circular con carga uniforme en pro-

yección horizontal ($EI = \text{const}$), 187. 3. El arco empotrado de alma llena. Concepto de área elástica. Fórmulas. Ejemplo. División en dovelas, 190. 4. Rigidez angular. Factor de transporte. Incógnitas que se inducen. Rigidez lineal. Efectos que provoca un desplazamiento. Ejemplos, 203. 5. Analogía de la columna, 210. 6. El arco articulado y empotrado, 212. 7. Armadura en arco de dos articulaciones. Solución analítica. Solución con una carga unitaria, 213. 8. Armadura en arco empotrada. Áreas elásticas del problema. Solución analítica. Solución con cargas unitarias. Validez de las fórmulas del arco de alma llena, 216.

Cap. 6. Piezas en balcón**223**

1. El balcón empotrado a flexión y torsión. Fuerzas elásticas. Fórmulas del balcón empotrado, 223. 2. Balcón simétrico empotrado a flexión y torsión. Simplificaciones por equilibrio y simetría. Fórmula y ejemplo, 235. Pieza semicircular de sección constante, con carga vertical distribuida uniformemente, 236. El balcón continuo. Rigidez angular. Factores de transporte, 238.

Cap. 7. La barra plana**243**

1. Ecuaciones de Bresse, 243. 2. La estructura isostática auxiliar. El área elástica. La ecuación de la barra plana, 249. 3. Línea de presiones, 254. Trazo de la línea de presiones, 255. 4. División en dovelas. Tabulación. Determinación de reacciones, 256. 5. Rigidez angular. Factor de transporte. Incógnitas que se inducen. Rigidez del arco articulado. Rigideces lineales, 261.

Cap. 8. Analogía de la columna**271**

1. Explicación e interpretación. Convención de signos. Cargas sobre el área elástica, 271. 2. Ejemplos: vigas y pórticos, 278. Momentos de inercia, 290.

Bibliografía**293**

1

Método de Cross

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES. RIGIDEZ ANGULAR, FACTOR DE TRANSPORTE, FACTOR DE DISTRIBUCIÓN

Este método recibe el nombre de su iniciador, Hardy Cross, quien le dio forma y lo publicó, aun cuando la idea original corresponde a Ritter. Al respecto, es conveniente ver algunos conceptos fundamentales:

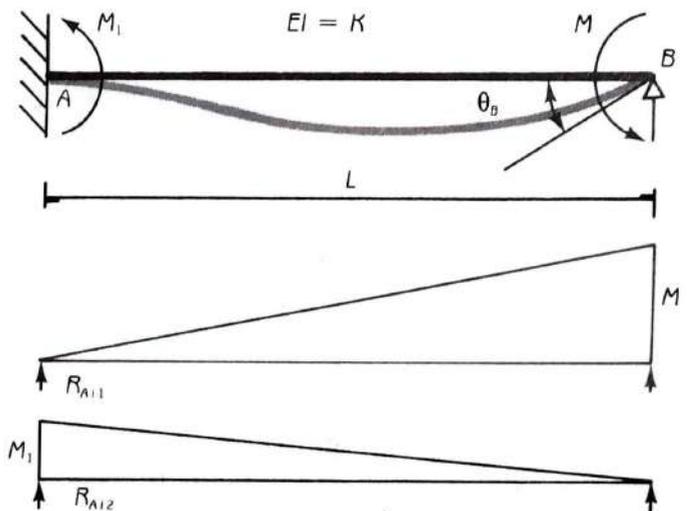
Consideremos el caso de una viga empotrada en un extremo y articulada en el otro, a la cual aplicamos un momento en el extremo articulado. Trataremos de calcular la intensidad del momento que aparece en el empotramiento:

Sabemos que:

$$\theta_A = 0$$

y

$$\theta_A = \theta_M - \theta_{M_1}$$



Al aplicar el primer corolario de la viga conjugada, tenemos:

$$\theta_M = \frac{R_{A11}}{EI} = \frac{ML}{2} \frac{1}{3} \frac{L}{L} \frac{1}{EI} = \frac{ML}{6EI}$$

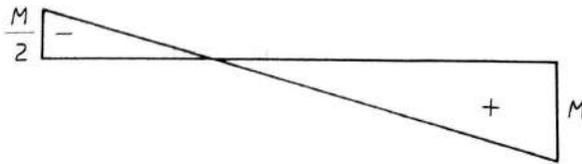
$$\theta_{M_1} = \frac{R_{A,2}}{EI} = \frac{M_1 L}{2} \frac{2}{3} \frac{L}{L} \frac{1}{EI} = \frac{M_1 L}{3 EI}$$

$$\theta_A = \frac{ML}{6 EI} - \frac{M_1 L}{3 EI} = 0$$

$$\underline{\underline{M_1 = \frac{M}{2}}}$$

Es decir, si aplicamos un momento en el extremo en que puede girar la pieza, en el otro extremo, si está empotrado, aparecerá otro momento, cuya intensidad es la mitad del primero y que es conocido como *momento de transporte*. En este caso, pieza recta de sección constante, el factor de transporte vale 1/2.

Además, podemos notar que el momento aparecido en el empotramiento tiene el mismo sentido de rotación que el momento provocador, es decir, si tenemos en cuenta el sentido de giro para obtener los signos de los momentos, dichos momentos serán del mismo signo. No obstante, si observamos el diagrama de momentos, tendremos:

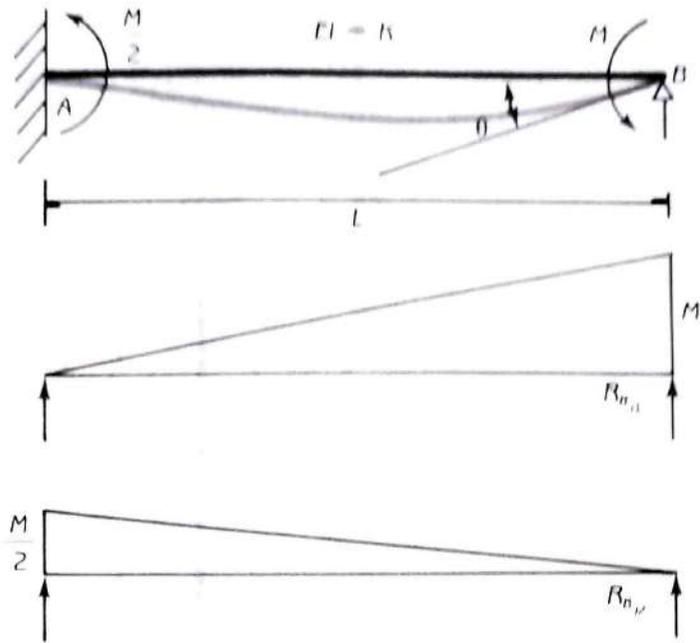


Vemos que en cuanto a las fuerzas elásticas que provocan, son de signo contrario, es decir, si uno de ellos provocaría las tensiones de algún lado de la viga, el otro las provocaría en el lado contrario, o sea, sus diagramas son de signo contrario.

Para valuar la rigidez de las piezas sujetas a la acción de momentos aplicados en sus extremos, nos valemos de las deformaciones que sufren las vigas, es decir, utilizaremos el criterio siguiente: si disponemos de dos piezas y para provocar a una de ellas una deformación angular cualquiera θ , utilizamos un momento de intensidad M_1 y para provocar a la segunda la misma deformación angular θ necesitamos un momento M_2 ; aquella que requiera un momento mayor para provocar la misma deformación será la más rígida y su rigidez estará en función directa del momento, o sea, si $M_1 = 2 M_2$, querrá decir que la rigidez de la primera pieza es el doble de la rigidez de la segunda. El ángulo θ que provocaremos en todas las piezas será $\theta = 1$, por ser esto lo más sencillo.

De acuerdo con lo anterior, la rigidez angular se define de la manera siguiente: *rigidez angular es el momento que se debe aplicar en el extremo de una pieza, para provocar en él una deformación angular unitaria.*

Calculemos la rigidez angular de las piezas del tipo siguiente:



$$\theta = \theta_1 - \theta_2 = \frac{R_{B11}}{EI} - \frac{R_{B12}}{EI},$$

$$\theta = \frac{ML}{2} \frac{2}{3} \frac{L}{EI} - \frac{M}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{3} \frac{L}{EI},$$

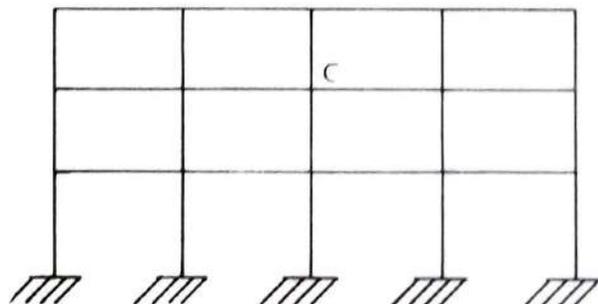
$$\theta = \frac{ML}{3EI} = \frac{ML}{12EI},$$

$$\theta = \frac{ML}{4EI}.$$

De acuerdo con la definición, si: $\theta = 1 \therefore M = r$.

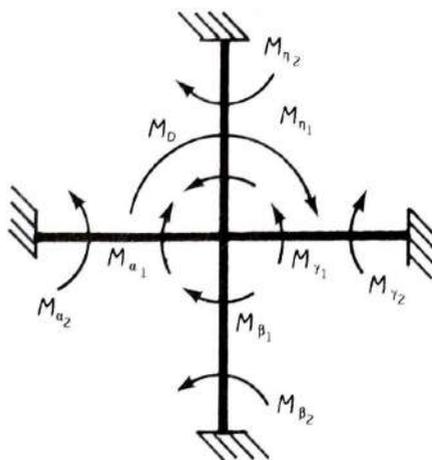
$$\therefore 1 = \frac{rL}{4EI} \quad \therefore r = \frac{4EI}{L}$$

Consideremos una estructura continua cualquiera.



En dicha estructura, si consideramos cada pieza como doblemente empotrada, podremos obtener los momentos que aparecen en los extremos de cada pieza.

Observemos lo que ocurre en el nudo C, en el cual estimamos que la estructura es continua, pero los extremos de las piezas que a él concurren aún los consideramos como empotramientos.



Los momentos M_{α} , M_{β} , M_{γ} y M_{η} son aquellos que aparecen en los miembros, considerado cada uno como empotrado.

Hacemos la aclaración que para aplicar el método, estimaremos siempre los momentos del apoyo sobre la barra.

Si efectuamos la suma de momentos en el nudo, que debe ser igual a cero para que esté en equilibrio, con los momentos de empotramiento, difícilmente podrá ser igual a cero, por lo que en general:

$$M_{\alpha_1} + M_{\beta_1} + M_{\gamma_1} + M_{\eta_1} \neq 0,$$

$$\therefore M_{\alpha_1} + M_{\beta_1} + M_{\gamma_1} + M_{\eta_1} = M_D.$$

Al sumar los momentos de empotramiento en el nudo, obtenemos que sobre ese nudo obra un momento, resultante de los anteriores, al cual llamaremos M_D .

Desde luego, para lograr el equilibrio de momentos en el nudo, debe aparecer en éste un momento de igual intensidad y sentido contrario al momento desequilibrado M_D .

Veremos qué cantidad del momento desequilibrado toma cada miembro del nudo.

Sabemos que los momentos equilibrantes:

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = M_D$$

y al aplicar la teoría del nudo elástico, tenemos:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4.$$